

# A PROPOSAL FOR STANDARDNESS OF SPATIAL GRAPHS

Kazuaki KOBAYASHI

(Received October 30, 1995)

## 1. 有限グラフの標準空間表現

この論文で我々は有限グラフの標準的な空間表現（空間グラフ）の候補になり得るものを2つ提案する。しかしその定義が「標準的」であるにふさわしいか否かを示す諸性質については半ハミルトングラフ以外あまり証明されていない。いわば「標準的」であろうという直感にもとづいたものであることを最初にお断りしておく。その直感を支えているものは円周、円周達、平面的グラフ、半ハミルトングラフ等に対して定義された「標準的」空間表現の定義を拡張しているかということと、それらの持っている諸性質を引き継いでいるかということである。以下、特に断らない限りグラフは有限、単純、連結とし、次数2以下の頂点も持たないものとする。（これらの条件は標準的空間グラフを考える場合に本質的でないグラフを排除するためのものである。）

**定義1**  $G$  を半ハミルトングラフとし、 $\beta_p$  を  $p$  枚のシートを持つ本とする。 $\Xi$  を  $\beta_p$  のバインダーとし、 $\Delta$  を  $G$  の1つのハミルトン道とする。埋め込み  $\varphi: G \rightarrow \beta_p$  が  $\Delta$  に関する本表現 (B.P.H. $\Delta$ ) であるとは次の条件をみたすときをいう。

- (1)  $\varphi(\Delta) \subset \Xi$
- (2)  $\forall e \in E(G)$  に対し  $\exists i S_i \in \beta_p$  (シート) s.t.  $\varphi(e) \subset S_i$

$\Delta$  と  $\phi$  を種々動かしたときの最小シート数を  $\widetilde{ms}(G)$  とおく、

$$\widetilde{ms}(G) = \min_{\Delta, \phi} \{p\}$$

**定義2** 半ハミルトングラフ  $G$  の空間グラフ  $\tilde{G}^*$  が標準空間グラフ (standard spatial graph) であるとは最小シート数を持つハミルトン道  $\Delta$  に関する本表現  $\varphi: (G, \Delta) \rightarrow (\beta_p, \Xi)$  ( $p = \widetilde{ms}(G)$ ) があって  $\tilde{G}^*$  と  $\varphi(G)$  がアンビエント・イソトピックとなることである。

**定義3**  $G$  をグラフとし、 $\beta_p$  を  $p$  枚のシートを持つ本とする。 $\Xi$  を  $\beta_p$  のバインダーとする。埋め込み  $\Psi: G \rightarrow \beta_p$  が本表現であるとは次の条件をみたすときをいう。

- (1)  $\Psi(V(G)) \subset \Xi$
  - (2)  $\forall e \in E(G)$  に対し  $\exists i S_i \in \beta_p$  (シート) s.t.  $\Psi(e) \subset S_i$
- (ハミルトン道に関する条件がないことに注意)

**定義4** 空間グラフ  $\tilde{G}^*$  がグラフ  $G$  の  $O$ -standard 空間グラフであるとは、最小シート数を持つ  $G$  の本表現  $\Psi: G \rightarrow \beta_p$  があって  $\tilde{G}^*$  と  $\Psi(G)$  がアンビエント・イソトピックになる

ことである.  $G$  の本表現の最小シート数を  $ms(G)$  とかく,  $ms(G) = \min_{\Psi} \{p\}$

**命題 1** 任意の単純, 連結な有限グラフ  $G$  に対し  $G$  の  $O$ -standard 空間グラフ  $\tilde{G}^*$  がある.

問題 1.  $G$  が半ハミルトングラフで,  $\tilde{G}^*$  が  $G$  の  $O$ -standard 空間グラフのとき  $G$  のあるハミルトン道  $\Delta$  に関する本表現  $\varphi$  があって  $\tilde{G}^*$  と  $\varphi(G)$  がアンビエント・イソトピックとなるか? すなわち  $O$ -standard graph は standard か?

問題 2.  $\tilde{G}^*$  がグラフ  $G$  の  $O$ -standard 空間グラフのとき  $\pi_1(S^3 - \tilde{G}^*)$  は自由群となるか?

**命題 2** 完全グラフ  $K_n$  に対し, 上の問題 1 は正しい. したがって完全グラフに関しては問題 2 も成り立つ.

証明  $\Psi: K_n \rightarrow \beta_p$  を最小シート数を持つ本表現とする.  $\Psi(K_n)$  の頂点をバインダー  $\Xi$  上左から順に番号をつける. 任意の辺  $e$  に対し  $\Psi(e)$  を含むシートは唯一枚だから完全グラフ  $K_n$  の特長より  $\Xi$  上で隣接している頂点  $v_i, v_{i+1}$  を結ぶ辺  $e_i$  が必ず存在し,  $\Psi(e_i)$  を含むシート  $S_j$  の中でバインダー  $\Xi$  に関し  $\Psi(e)$  は innermost である. そこで  $\Psi(e)$  をアンビエント・イソトピーで動かして  $\Xi$  上に移すことが出来る. すると道  $v_1 v_2 \cdots v_n$  はハミルトン道  $\Delta$  であり,  $\Psi$  は  $\Delta$  に関する本表現でありシート数が最小の  $\lceil (n+1)/2 \rceil$  であることは明らか.  $\square$

**注 1** 上の命題 2 を一般の半ハミルトングラフ  $G$  におきかえたとき,  $\Psi: G \rightarrow \beta_p$  が最小シート数を持つ本表現 ( $p = ms(G)$ ) でバインダー  $\Xi$  上で  $\Psi(V(G))$  を左側から番号づけたとき (それを  $v_1, v_2, \dots, v_n$  とおく) ハミルトン道  $\Delta = v_1 v_2 \cdots v_n$  があれば上と同じ議論が出来る.

**定義 5**  $\beta_p = \Xi \cup \bigcup_i S_i$  を  $p$  枚のシートをもつ本とし, 同相写像  $h_\sigma: \beta_p \rightarrow \beta_p$  は次の条件を満足とする.

(1)  $h_\sigma|_{\Xi} = id$ .

(2)  $h_\sigma(S_i) = S_{\sigma(i)}$  ここで  $\sigma: \{1, 2, \dots, p\} \rightarrow \{1, 2, \dots, p\}$  は集合  $\{1, 2, \dots, p\}$  上の置換である.

このとき  $h_\sigma$  を  $\beta_p$  のシート変換という.

問題 3.  $\tilde{G}^*$  をグラフ  $G$  の  $O$ -standard 空間グラフとしたとき,  $\tilde{G}^*$  はシート変換と 3 次元球面内のアンビエント・イソトピーを除いて一意か?

次にもう一つの標準的な空間グラフの概念を導入する.

**定義 6** グラフ  $G$  に対し次の性質をもつグラフ  $H$  を考える.

- 1)  $H$  は半ハミルトングラフである.
- 2)  $H$  は  $G$  を部分グラフとして含む.
- 3)  $H$  と  $G$  の頂点集合は一致する.  $V(H) = V(G)$
- 4)  $H$  は上の (1)~(3) の性質をもっているグラフのうち  $|E(H)| - |E(G)|$  が最小のものである. このとき  $H$  を  $G$  を含む極小半ハミルトングラフ (*minimal pseudo  $H$ -graph containing  $G$* ) という.

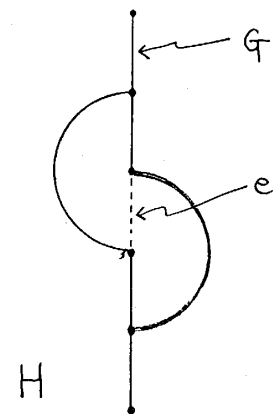


図 1

**注 2**  $G$  を含む極小半ハミルトングラフ  $H_G$  は同形の範囲内では一意には決まらない. また  $G$  が元来半ハミルトングラフなら  $H = G$  である.

**定義 7** グラフ  $G$  を含む極小半ハミルトングラフを  $H$  とする.  $\Delta_H$  を  $H$  のハミルトン道とする. このとき  $H$  をいろいろ動かして最小シート数をもつ  $\Delta_H$  に関する  $H$  の本表現  $\Psi: (H, \Delta_H) \rightarrow (\beta_p, \Xi)$  ( $p = \min_H \widehat{ms}(H)$ ) を取り,  $\Psi(G)$  とアンビエント・イソトピックな  $G$  の空間表現  $\tilde{G}^*$  を  $G$  の  $K$ -standard 空間グラフという.

**注 3**  $G$  が半ハミルトングラフでなく,  $G$  に唯 1 つの辺  $e$  を付け加えて  $H = G \cup \{e\}$  が  $G$  の極小半ハミルトングラフとなったとき  $H$  に 2 つ以上のハミルトン道があるときがある. (図 1)

**注 4** 定義 5 および定義 6 より  $K$ -standard という概念は明らかに半ハミルトングラフの場合の standard 空間グラフの拡張になっている. 一方  $O$ -standard の方は完全グラフ以外のグラフに対しては拡張になっているか否か今のところ不明である. (問題 1 および命題 2 参照また命題 11 も参照.)

**注 5**  $K$ -standard 空間グラフに対しても命題 1 と同様のことが成り立つ.

問題 4.  $K$ -standard と  $O$ -standard とは一致するか?

**命題 3** 完全グラフ  $K_n$  に対しては  $K$ -standard と  $O$ -standard は一致する.

**証明** 命題 2 によって完全グラフ  $K_n$  に対しては  $O$ -standard は今までの standard に一致する. 一方半ハミルトングラフに対しては  $K$ -standard と standard は一致するから, 結局完全グラフに関しては  $O$ -standard,  $K$ -standard, (半ハミルトングラフに対する) standard はアンビエント・イソトピーの範囲で一致する.  $\square$

**命題 4** グラフ  $G$  の極大木 (*maximal tree*) を  $T_G$  とすると

$$\text{rank}H_1(G:Z) = |E(G)| - |E(T_G)| \text{ である.}$$

証明  $G$  は連結だからオイラー・ポアンカレの公式より  $\text{rank}H_1(G:Z) = 1 - |V(G)| + |E(G)|$  である.

また  $1 - \text{rank}H_1(T_G:Z) = |V(G)| - |E(T_G)|$  であり

$$\text{rank}H_1(T_G:Z) = 0 \text{ かつ } V(T_G) = V(G)$$

$$\text{よって } 1 = |V(T_G)| - |E(T_G)| = |V(G)| - |E(T_G)|$$

$$|V(G)| = 1 + |E(T_G)|$$

$$\text{ゆえに } \text{rank}H_1(G:Z) = 1 - (1 + |E(T_G)|) + |E(G)|$$

$$= |E(G)| - |E(T_G)|$$

□

**系 4.1** 完全 2 部グラフ  $K_{n,n-2}$  に対する極小半ハミルトングラフを  $H$  とすると

$$\text{rank}H_1(H:Z) = \text{rank}H_1(K_{n,n-2}:Z) + 1$$

証明  $K_{n,n-2}$  は半ハミルトングラフでないから  $|E(H)| - |E(K_{n,n-2})| \geq 1$  しかも  $K_{n,n-2}$  に 1 本の辺を加えて半ハミルトングラフに出来るので  $|E(H)| - |E(K_{n,n-2})| = 1$  そこで  $H = K_{n,n-2} \cup \{e\}$  とおくと  $e \in E(H)$  で  $e \notin T_{K_{n,n-2}}$  ( $K_{n,n-2}$  の極大木) であり  $V(K_{n,n-2}) = V(H)$  だから  $T_{K_{n,n-2}}$  を  $H$  の極大木と考えることが出来る. これを  $T_H (= T_{K_{n,n-2}})$  とおく. 従って  $e \notin E(T_H)$  そこで命題 4 より  $(\text{rank}H_1(H:Z) = |E(H)| - |E(T_H)| = |E(K_{n,n-2})| + 1 - |E(T_{K_{n,n-2}})| = \text{rank}H_1(K_{n,n-2}:Z) + 1$

□

上の系の拡張として次の命題 5 が証明出来る.

**命題 5** グラフ  $G$  の極小半ハミルトングラフを  $H$  とし

$$H = G \cup \{e_1, e_2, \dots, e_p\} \text{ とおくと } \text{rank}H_1(H:Z) = \text{rank}H_1(G:Z) + p$$

証明.  $G$  の 1 つの極大木を  $T_G$  とおくと  $V(H) = V(G)$  より  $T_G$  は  $H$  の極大木でもある. そこでそれを  $T_H (= T_G)$  とかくと  $e_i \notin T_H$  であり, 命題 4 より

$$\text{rank}H_1(H:Z) = |E(H)| - |E(T_H)| = |E(G)| + p - |E(T_H)| = |E(G)| + p - |E(T_G)|$$

$$= \text{rank}H_1(G:Z) + p$$

□

グラフ  $G$  の極小半ハミルトングラフ  $H$  は同形の範囲で一意に決まらないが次の命題が言える.

**命題 6**  $G$  をグラフとし,  $H$  を  $G$  の極小半ハミルトングラフとすると

$$\text{rank}H_1(H:Z) \text{ は一定である.}$$

証明  $H$  は次の性質によって定義される.

- 1)  $H > G$
- 2)  $H$  は半ハミルトングラフ

3)  $V(H) = V(G)$

4)  $H$  は上の 1)~3) をみたすもののうちで  $|E(H)| - |E(G)|$  が最小

そこで  $H = G \cup \{e_1, e_2, \dots, e_p\}$  とすると命題 5 より  $\text{rank}H_1(H:Z) = \text{rank}H_1(G:Z) + p$  である。

$G$  の極小半ハミルトングラフは 4) の性質から  $p$  が一定で、よって  $\text{rank}H_1(H:Z)$  は一定である。  $\square$

**注 6** 極小半ハミルトングラフの性質 1), 3) からグラフ  $G$  の極大木  $T_G$  は  $H$  の極大木にもなっている。

一般にグラフ  $G$  に対し  $\text{rank}H_1(G:Z) = |E(G)| - |E(T_G)|$  だから

$$\begin{aligned} p &= \text{rank}H_1(H:Z) - \text{rank}H_1(G:Z) \\ &= |E(H)| - |E(T_H)| - |E(G)| + |E(T_G)| \\ &= |E(H)| - |E(G)| \quad (\text{何故なら } T_H = T_G \text{ と出来るから}) \end{aligned}$$

これは 4) の性質である。従って 4) の性質は次の 4)' にしてもよい。

4)'  $H$  は上の 1)~3) をみたすもののうちで  $\text{rank}H_1(H:Z)$  が最小のもの。

**注 7** (極小半ハミルトングラフの作り方) グラフ  $G$  の極大木  $T_G$  の  $|E(T_G)|$  は一定である (何故なら  $|E(G)| - |E(T_G)| = \text{rank}H_1(G:Z)$ )。そこで  $G$  からその極小半ハミルトングラフ  $H$  を作るには、先ず極大木  $T_G (= T_H)$  を取り  $T_G$  を一本の道に変えるように  $T_G$  に辺  $e_1$  を加え、 $T_G$  から辺  $e'_1$  を取り去る。このようにして操作  $G \cup \{e_1, \dots, e_p\}$  を行い

$$T_G \longrightarrow P = (T_G - \{e'_1, \dots, e'_p\}) \cup \{e_1, \dots, e_p\}$$

が道になっているとき、 $H = G \cup \{e_1, \dots, e_p\}$  は  $G$  の極小半ハミルトングラフであり、 $P$  は  $H$  のハミルトン道になっている。(  $e'_1, \dots, e'_p$  は  $T_G$  から取り去ったあとでも  $G$  の辺になっている。) そこで  $G$  に  $\{e_1, \dots, e_p\}$  を加えて半ハミルトングラフ  $H$  になったとき、そのハミルトン道  $\Delta_H$  において  $|E(\Delta_H)| = |E(T_G)|$  が成り立っていれば  $H$  は  $G$  の極小半ハミルトングラフである。

**定義 8** グラフ  $G$  の極大木を  $T_G$  とおく。  $E(G) - E(T_G) = \{e_1, e_2, \dots, e_p\}$  とし、各  $e_i$  の両頂点を  $T_G$  の中で結んだ道を  $f_i$  とおく。  $c_i = e_i \cup f_i$  とおくと  $\{c_1, c_2, \dots, c_p\}$  は  $H_1(G:Z)$  の基となっている。この基  $B = \{c_1, c_2, \dots, c_p\}$  を極大木  $T_G$  に関し適正に取られた基という。勿論この基は極大木  $T_G$  の取りかたに依存している。

**定義 9** グラフ  $G$  の極小半ハミルトングラフを  $H$  とする。  $H$  の極大木として得られたハミルトン道  $\Delta_H$  を取り、  $H_1(H:Z)$  の基として  $\Delta_H$  に関し適正に取られた基をとる。この基を  $B_{\Delta_H} = \{x_1, x_2, \dots, x_\beta\}$  ( $\beta = \text{rank}H_1(H:Z)$ ) とおく。次に  $H_1(G:Z)$  の ( $B_{\Delta_H}$  から導かれる) 基として、次のような極大木  $T_G$  を定めて、それに関し適正に取られた基を取る。  $T_G$  の定め方:  $E(\Delta_H) \cap E(G)$  に含まれる全ての辺は  $T_G$  に含まれるとする。  $\Delta_H$  に関する  $H$  の最小シート数を持つ本表現  $\varphi: H \rightarrow \beta_p$  を取ると  $E(\Delta_H) \cap E(G)$  に含まれるものの  $\varphi$  による像は全

て  $\beta_p$  のバインダー上にある. これらの辺の集合  $\{\varphi(e)\} \cup \varphi(V(G)) = \square_1 \cup \square_2 \cup \cdots, \cup \square_l$  (非交和) とかく. ここで  $\square_j$  は連結成分とする.  $E(G)$  の元の  $\varphi$  による像が異なる  $\square_i$  と  $\square_j$  を結び, かつ  $\beta_p$  のあるシートにおいて *innermost* なもの  $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_q$  を取る. すると  $\varphi(G)$  の極大木は  $\cup_i \square_i \cup \cup_j \alpha_j$  の部分集合として取れるので, これに対応する  $G$  の部分を  $T_G$  とおく. この  $T_G$  を  $\varphi(G)$  による  $G$  の指定された極大木という. 一般にこの  $T_G$  は一意には決まらない.

**命題 7** グラフ  $G$  の辺集合  $E(G)$  の部分集合  $F$  に対し,  $F$  に含まれる全ての辺で構成される  $G$  の部分グラフ  $G_1$  (連結とは限らない) がサイクルを含まない (すなわち  $H_1(G_1; \mathbb{Z}) = 0$ ) なら  $G_1$  を含む  $G$  の極大木  $T_G$  がある.

証明  $E(G) - F$  の元を次々と  $F$  に加えていく.  $e_i \in E(G) - F$  として  $F_1 = F \cup \{e_1\}$ ,  $F_2 = F_1 \cup \{e_2\}$ ,  $\cdots$ ,  $F_{k-1} = F_{k-2} \cup \{e_{k-1}\}$  とする. ただし  $e_i$  を加えることにより  $F_i$  がサイクルを含むことになるなら  $e_i$  は加えないこととする. そこで  $F_k = F_{k-1} \cup \{e_k\} = F \cup \{e_1, e_2, \cdots, e_k\}$  はサイクルを含まず  $\forall e \in E(G) - F_k$  に対し  $F_k \cup \{e\}$  はサイクルを含むなら  $F_k$  は極大木である. すなわち  $F_k = T_G$  □

## 2. 完全 2 部グラフ $K_{m,n}$ について

完全 2 部グラフは半ハミルトングラフである時とそうでない時があるので, その標準グラフについて述べることは, 半ハミルトングラフとそうでない時の標準グラフについて比較するのに意味があると思われる. なお完全 2 部グラフが半ハミルトングラフになる場合は [K] も参照のこと.

**命題 8** (鳥羽) 完全  $n$  部グラフ  $K_{m_1, m_2, \cdots, m_n}$  ( $m_1 \geq m_2 \geq \cdots \geq m_n$ ) が半ハミルトングラフである必要十分条件は  $m_1 \leq \sum_{i=2}^n m_i + 1$  である.

以下では本表現の代わりに蕾表現 (bud presentation) も多く使う. その場合シート (sheet) は花びら (petal) になる.

**命題 9** 完全 2 部グラフ  $K_{m,n}$  において

$$\text{rank} H_1(K_{m,n}; \mathbb{Z}) = (m-1)(n-1)$$

証明  $|V(K_{m,n})| = m+n$ ,  $|E(K_{m,n})| = mn$  なので  $K_{m,n}$  の極大木を  $T_{K_{m,n}}$  とおくと

$$|E(T_{m,n})| = 2n-1 + (m-n) = m+n-1$$

よって

$$\begin{aligned} \text{rank} H_1(K_{m,n}; \mathbb{Z}) &= |E(K_{m,n})| - |E(T_{m,n})| \\ &= mn - (m+n-1) \\ &= (m-1)(n-1) \end{aligned}$$
□

**命題 10** 完全 2 部グラフ  $K_{m,n}$  ( $m \geq n$ ) の極小半ハミルトングラフを  $H$  とすると

$$\text{rank}H_1(H:Z) = \begin{cases} \text{rank}H_1(K_{m,n}:Z) = (m-1)(n-1), & \text{for } m=n \text{ or } n+1 \\ n(m-2), & \text{for } m \geq n+2 \end{cases}$$

**証明** 命題 6 によって  $\text{rank}H_1(H:Z)$  は一定である.

$V(K_{m,n}) = U \cup V = \{u_1, \dots, u_m\} \cup \{v_1, \dots, v_n\}$  とする.  $m=n$  または  $m=n+1$  のとき  $K_{m,n}$  は半ハミルトングラフだから  $\text{rank}H_1(H:Z) = \text{rank}H_1(K_{m,n}:Z)$  であり  $m \geq n+2$  のとき

$$e_1 = u_{n+1} * u_{n+2}, e_2 = u_{n+2} * u_{n+3}, \dots, e_{m-n-1} = u_{m-1} * u_m = u_{n+(m-n-1)} * u_m$$

とおくと  $H = K_{m,n} \cup \{e_1, e_2, \dots, e_{m-n-1}\}$  は  $K_{m,n}$  の半ハミルトングラフである. よって  $\text{rank}H_1(H:Z) = \text{rank}H_1(K_{m,n}:Z) + m - n - 1 = mn - 2n = n(m-2)$   $\square$

**注 8** 命題 6 の後の注 7 (極小半ハミルトングラフの作り方) より  $K_{m,n}$  においては次のことが成り立つ

$$|V(K_{m,n})| = m+n, |E(K_{m,n})| = mn \text{ だから}$$

$$\begin{aligned} |E(T_{K_{m,n}})| &= |E(K_{m,n})| - \text{rank}H_1(K_{m,n}:Z) \\ &= mn - (1 - (m+n) + mn) \\ &= m+n-1 = |E(T_H)| \end{aligned}$$

図 2 のように  $p$  本の辺  $\{e_1, \dots, e_p\}$  ( $p=m-n-1$ ) を付け加えることにより  $K_{m,n} \cup \{e_1, \dots, e_p\}$  はハミルトン道を持つことが出来るので  $H = K_{m,n} \cup \{e_1, \dots, e_p\}$  は半ハミルトングラフで  $|E(H)| = 2n+m-n-1 = m+n-1 = |E(T_{K_{m,n}})|$   
故に  $H$  は  $K_{m,n}$  を含む極小半ハミルトングラフである.

グラフ  $G$  のハミルトン道  $\Delta$  を考慮しない本表現 (定義 2) に必要な最小シート数は  $ms(G)$  であった.

**命題 11** (Bernhart-Kainen [B-K])

- (1)  $K_{m,n}$  ( $m \geq n$ ) において  $m \geq n^2 - n + 1$   
 $\Rightarrow ms(K_{m,n}) = n$
- (2)  $ms(K_{1,1}) = 0, ms(K_{2,2}) = 1, ms(K_{3,3}) = 3,$   
 $ms(K_{m,m}) \leq m-1$  ( $m \geq 4$ )

**命題 12**  $\widetilde{ms}(K_{m,m}) = m$  (定義 1 の意味での最小シート数)

**証明**  $K_{m,m} < K_{2m}$  で  $\widetilde{ms}(K_{2m}) = ms(K_{2m}) = m$  であるから  $\widetilde{ms}(K_{m,m}) \leq m$  である. そして  $m$  が奇数のとき  $K_{m,m}$  の蕾表現における最長辺は長さが  $m$  で  $m$  本ある. この最長の  $m$  本の辺はどの 2 本も 1 つのシートに含まれない

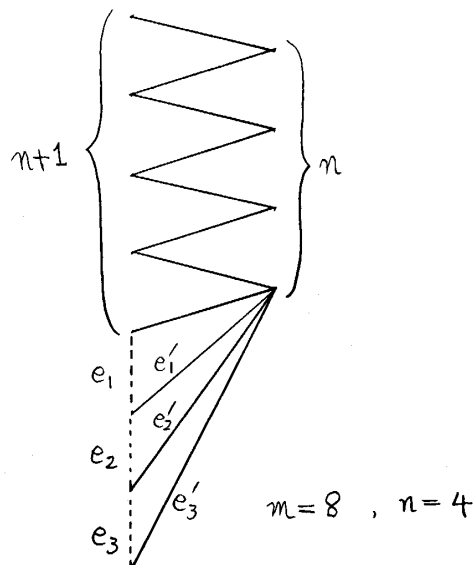


図 2

から  $\widehat{ms}(K_{m,m}) \geq m$  である. また  $m$  が偶数のとき  $K_{m,m}$  の蓄表現に含まれる最長辺は長さが  $m-1$  で  $2m$  本ある. これが  $m-1$  枚のシートに含まれるならば最長辺を少なくとも 3 本含むシートが少なくとも 1 枚は必要であるが 1 枚のシートが最長辺を 3 本含むことは出来ない. よって  $\widehat{ms}(K_{m,m}) \geq m$  である. 以上より  $\widehat{ms}(K_{m,m}) = m$   $\square$

**命題 13** 完全 2 部グラフ  $K_{m,n} (m \geq n)$  の極小半ハミルトングラフを  $H$  とすると

$$\min_H \widehat{ms}(H) = n$$

である.

**証明**  $H > K_{m,n} > K_{n,n}$  で  $K_{n,n}$  はハミルトングラフである. そして命題 12 より  $\widehat{ms}(K_{n,n}) = n$  である. よって  $\widehat{ms}(H) \geq n$ . 一方  $V(K_{m,n}) = U \cup V \mid |U| = m, |V| = n$  とし  $H = K_{m,n} \cup \{e_1, e_2, \dots, e_p\}$   $p = m - n - 1$  とおくと  $e_i$  の両端は  $U$  の頂点としてよい.  $H$  のハミルトン道に関する本表現を作るには  $V$  の頂点と  $U$  の  $n$  個の頂点は交互にならべる必要がある. その次に  $U$  の  $m - n$  個の頂点をならべて  $V$  に関する  $H$  の VS 表現を作り, 1 番外側に  $\bar{e}_i$  を作ると本表現  $\varphi: H \rightarrow \beta_n$  を得る. 故に  $\widehat{ms}(H) = n$   $\square$

**定義 10**  $S^1 = \{(x, y, 0) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$  とする.

$V(K_{m,n}) = U \cup V = \{u_1, \dots, u_m\} \cup \{v_1, \dots, v_n\}$  として  $U$  の元を  $S^1$  上に,  $V$  の元を  $z$  軸上におく (番号順でなくともよい). 辺  $e_{is}$  を  $e_{is} = v_i * u_s$  として  $K_{m,n}$  の空間表現を作る.  $S^3 = \mathbf{R}^3 \cup \{\infty\}$  としたとき  $S^1 \cup \{z\text{-axis}\} \cup \{\infty\}$  は Hopf link になる. このとき上の空間表現を  $K_{m,n}$  の Hopf link 表現 (Hopf link presentation) といい,  $\bar{K}_{m,n}^H$  とかく.

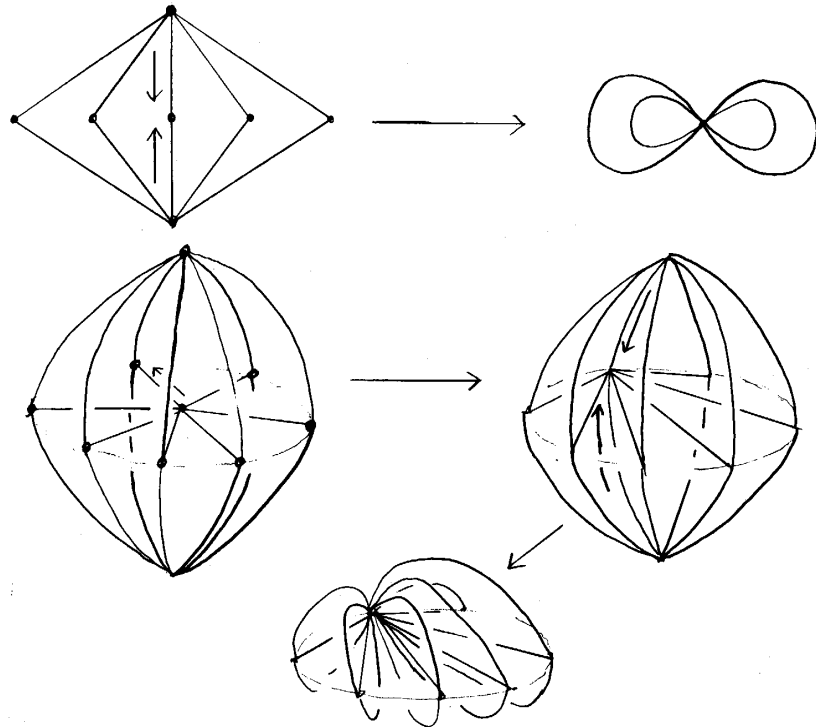


図 3



**命題 14** Hopf link 表現  $\tilde{K}_{m,n}^H$  に対し  $\exists \varphi: K_{m,n} \longrightarrow \beta_n$  s.t.  $\varphi(K_{m,n}) \approx \tilde{K}_{m,n}^H$  従って  $m \geq n^2 - n + 1$  の時  $\tilde{K}_{m,n}^H$  は  $O$ -standard である.

次に完全 2 部グラフ  $K_{m,n}$  のホモトピー型を調べる.

$$\left. \begin{array}{l} K_{m,1} \simeq \text{one point} \\ K_{m,2} \simeq (m-1)\text{-bouquet} \\ K_{m,3} \simeq 2(m-1)\text{-bouquet} \\ \vdots \\ K_{m,n} \simeq (m-1)(n-1)\text{-bouquet} \end{array} \right\} \text{図 3}$$

上の変形は全て  $\mathbf{R}^3$  内の変形だから次の命題が証明出来た.

**命題 15**  $\tilde{K}_{m,n}^H$  を  $K_{m,n}$  の Hopf link 表現とすると  $K_{m,n} \simeq (m-1)(n-1)\text{-bouquet}$  であり  $\pi_1(\mathbf{R}^3 - \tilde{K}_{m,n}^H) =$  階数が  $\text{rank} H_1(K_{m,n}; \mathbf{Z})$  に等しい自由群である.

**定義 11** 完全 2 部グラフ  $K_{m,n}$  の頂点集合を

$V(K_{m,n}) = U \cup V = \{u_1, \dots, u_m\} \cup \{v_1, \dots, v_n\}$  とおく.  $\forall v_i$  に対し  $v_i$  と結ばれる辺  $e_{ik} = v_i * u_k (k=1, 2, \dots, m)$  は全て 1 つのシートに含まれるという本表現 (又は蕾表現) があり, 実際この方法で最小シート数をもつ本表現を実現している. この本表現を頂点集合  $V$  に関する one vertex-one sheet presentation (VS-表現) と呼ぶことにする.  $V$  に関する VS-表現は  $\varphi: K_{m,n} \longrightarrow \beta_n (m \geq n)$  である.

**命題 16**  $V$  に関する  $\forall$  VS-表現  $\varphi: K_{m,n} \longrightarrow \beta_n$  に対し  $\varphi$  とアンビエント・イソトピックになる Hopf link 表現  $\chi: K_{m,n} \longrightarrow \beta_n$  がある. また, その逆も言える.

次ぎに完全 2 部グラフ  $K_{m,n} (m \geq n)$  の self-linked, self-knotted について述べる.

**注 9** 今までに知られていることは, 次のことである.

- $K_{m,3}$  は self-linked でない, self-knotted でもない.
- $K_{m,4}$  は self-linked である. 何故なら  $K_{4,4} - \{e\}$  が self-linked だから (図 4).  
 $K_{m,4} (m \geq 4)$  の self-knottedness については後述.

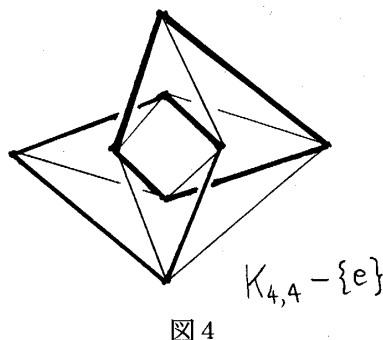


図 4

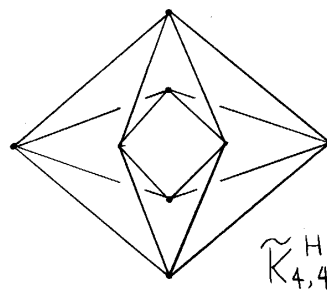


図 5

○  $K_{5,5}$  は self-knotted である. (Kohara [Ko])

**命題 17**  $K_{m,4}(m \geq 4)$  は self-knotted ではない.

**証明** 先ず  $K_{4,4}$  の Hopf link 表現  $\tilde{K}_{4,4}^H$  (図 5) は非自明な結び目を含まないので  $K_{4,4}$  は self-knotted ではない.

次に  $K_{m,4}$  の Hopf link 表現  $\tilde{K}_{m,4}^H$  を取る.  $\tilde{K}_{m,4}^H$  に含まれるサイクルの長さは高々 8. それを  $\tilde{C} = v_{i1}u_{j1}v_{i2}u_{j2}v_{i3}u_{j3}v_{i4}u_{j4}$  とおくと  $\tilde{C} \subset \tilde{K}_{4,4}^H \subset \tilde{K}_{m,4}^H$  となる  $K_{4,4}$  の Hopf link 表現がある.  $\tilde{K}_{4,4}^H$  は非自明な結び目を含まない. 故に  $\tilde{C}$  は自明な結び目. 故に  $K_{m,4}(m \geq 4)$  は self-knotted ではない.  $\square$

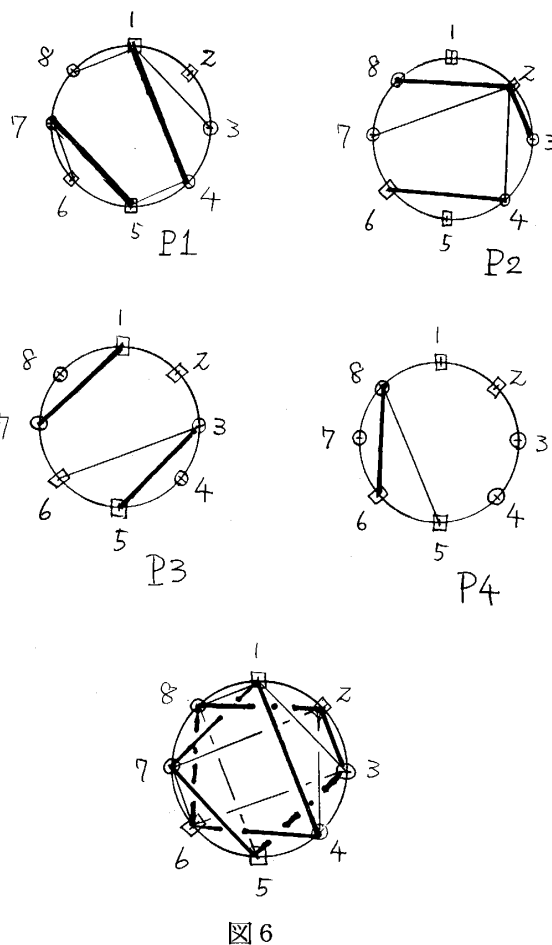
以下で完全 2 部グラフ  $K_{m,n}$  の standard 表現と頂点集合  $V$  に関する VS-表現について述べる. 定義から明らかなように  $m \geq n^2 - n + 1$  の時 VS-表現は standard 表現である.

**例 1**  $K_{4,4}$  において VS-表現にアンビエント・イソトピックでない 4-シート表現がある.

**証明**  $K_{4,4}$  の VS-表現 (または Hopf link 表現)  $\tilde{K}_{4,4}$  は非自明な結び目を含まない. そこで 4-シート VS 表現  $\varphi: K_{4,4} \rightarrow \beta_4$  で  $\varphi(K_{4,4})$  が非自明な結び目を含むものがあれば, それは VS-表現ではない. 図 6 がその例である.  $\square$

**命題 18** (中西)  $K_{4,4}$  の 3-シート表現 ( $O$ -standard 表現) は非自明な結び目を含まない.

**証明**  $K_{4,4}$  に含まれるサイクルの長さは 4, 6, 8 であり,  $O$ -standard 表現において非自明な結び目になる可能性のあるのは 6-, 8-サイクルである. 以下で 8-サイクルの場合を考える. 8-サイクルを構成している 8 本の辺が 3 シートに含まれる方法は各シートに 3 本, 3 本, 2 本ずつ含まれるか 4 本, 2 本, 2 本ずつ含まれるかであるとしてよい. (何故なら, あるシートが 1 本の辺のみを含んでいると, 必ず他の 2 シートに含まれている辺から 1 本の辺をこのシートに



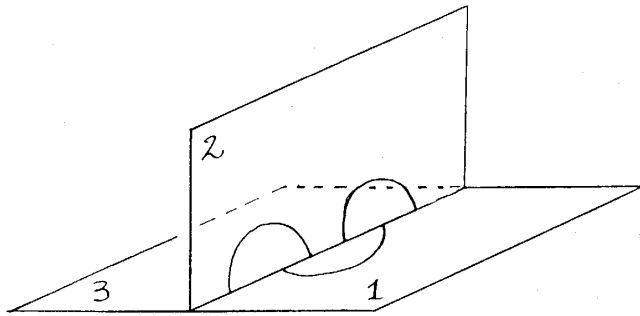


図 7-1

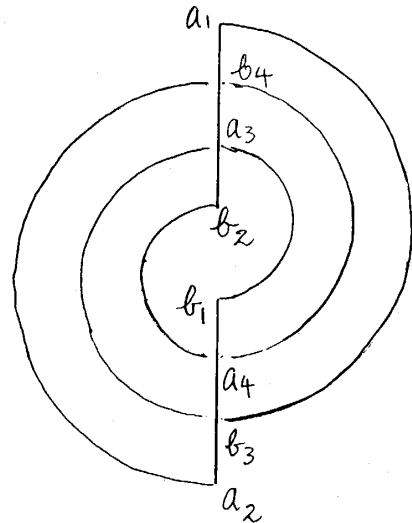


図 7-2

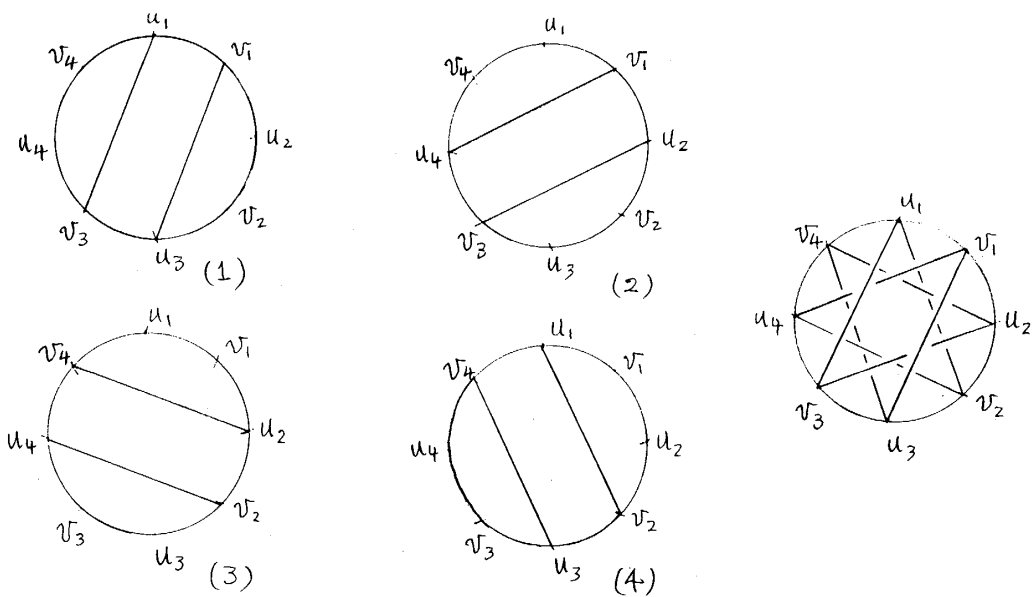


図 8

移せる。)そこで図 7-1 のように第 2 シートに 2 本辺が含まれているとしてよい. すると 8 サイクルからなる 2-bridge 表現が得られ, そのうち 8 頂点を持つ非自明な結び目は 3 つ葉結び目のみ (図 7-2). このとき  $\varphi(K_{4,4})$  を構成している 2 本の辺  $a_1b_1, a_2b_2$  は第 1, 第 3 シートに入れられず, 第 2 シートにも入れられない. 従って  $K_{4,4}$  の 3 シート表現は非自明な結び目を含み得ない. 6 サイクルの場合も同様である.  $\square$

**例 2**  $K_{4,4}$  の *standard* (*O-standard* ではない) 表現で非自明な結び目を含むものがある (図 8). これは VS-表現ではない.

サイクル  $u_1v_2u_4v_1u_3v_4u_2v_3$  の空間表現は 3 つ葉結び目 (trefoil knot) である.  $\square$

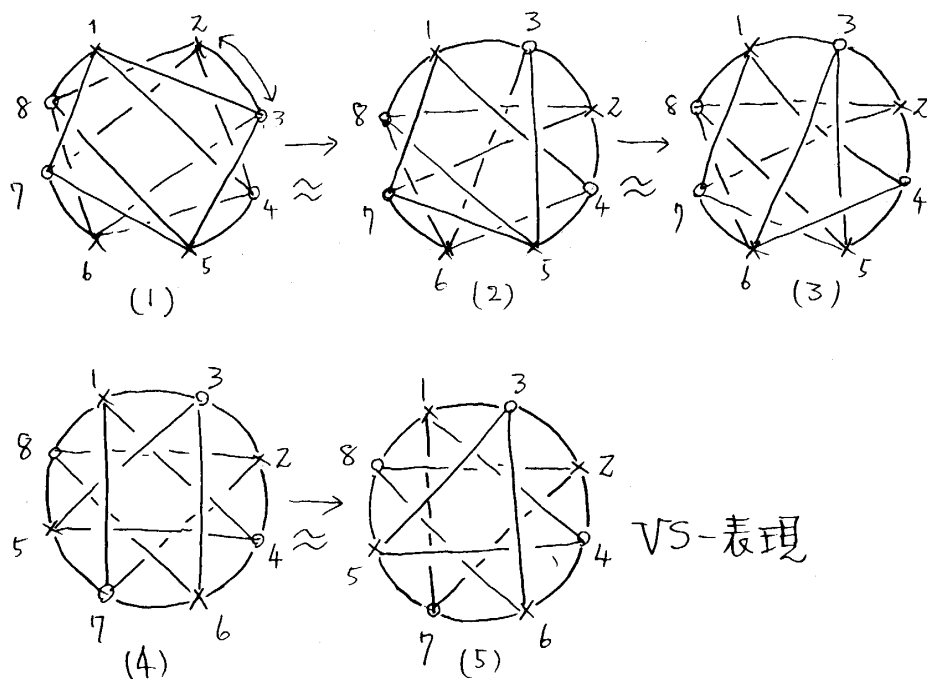


図9

注10 Bernhart-Kainen の  $K_{4,4}$  の3シート表現は VS-表現 (4シート表現) にアンビエント・イソトピックである. (図9)

## 参考文献

- [B-K] Bernhart, F. and Kainen, P.: The book thickness of a graph, J. Combin. Theory 27 (1979) 320-331
- [E-O] Endo, T. and Otsuki, T.: Note on spatial representation of graphs, Hokkaido Math. J. XXXIII (1994) 383-398
- [K] Kobayashi, K.: Standard spatial graph, Hokkaido Math. J. XXI (1992) 117-140
- [Ko] Kohara, T.: Knots and links in spatial graph, Master Thesis, Waseda Univ. (1993)
- [O] Otsuki, T.: Knots and links in certain spatial complete graphs, Master Thesis, Waseda Univ. (1994)
- [S] Simabara, M.: Knots in certain spatial graphs, Tokyo J. Math. 11 (1988) 405-413

## A Proposal For Standardness Of Spatial Graphs

Kazuaki KOBAYASHI

In this paper we propose two kinds of standardness of spatial presentation of a graph. First one is as follows. For a graph  $G$  take a minimal pseudo Hamilton graph  $H$  containing  $G$  which means that

- (1)  $H$  is a pseudo Hamilton graph,
- (2)  $H$  contains  $G$ ,
- (3)  $V(H) = V(G)$  and
- (4)  $|E(H) - E(G)|$  is minimum with respect to the above properties (1)–(3).

And we consider a book presentation with respect a Hamilton path  $\Delta$  of  $H$ ;  $\varphi: (H, \Delta) \rightarrow (B_p, \Xi)$  where  $\Xi$  is the binder of  $B_p$ . If  $p$  is minimum, then we call  $\varphi(G)$  a K-standard spatial graph of  $G$ . Second one is as follows. We take a book presentation  $\varphi: G \rightarrow \beta_p$  with  $(V(G)) \subset \Xi$ . If  $p$  is minimum, then we call  $\varphi(G)$  an O-standard spatial graph. We study the relation between standard, K-standard and O-standard spatial graphs. They all coincide for the complete graph. Next we consider for the complete bipartite graph  $K_{m,n}$  and got interest results.